



Notation :

Pour $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, dans ce cours, la notation $|a, b|$ désignera un intervalle d'extrémités a, b qui peut être soit ouvert, soit fermé, soit semi ouvert selon les besoins. (On pourra remarquer que dans cette notation, b peut être strictement plus petit que a . Par exemple, l'intervalle $|3, -\infty|$ a un sens.)

■ Exemple 1 :

La notation $|3, 2|$ pourra désigner $[2, 3]$, $[2, 3[$, $]2, 3]$ ou encore $]2, 3[$ suivant les besoins.

La notation $|2, 3|$ désignera $[2, 3[$ ou $]2, 3[$ suivant les besoins.

I Rappels de notations, vocabulaire et d'intégration sur un intervalle $[a, b]$

Rappel de notation : pour désigner l'intégrale d'une fonction continue f sur un intervalle I contenant a et b , (avec non nécessairement $a < b$) on peut écrire :

$$\int_a^b f(t) dt, \quad \int_a^b f$$

I-1 Intégration par partie sur un segment

Théorème 1 Intégration par partie

Soit u, v deux fonctions $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle fermé $[a, b]$, alors

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

■ Exemple 2 :

Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$

On pose les deux fonctions $u, v \in \mathcal{C}^1([0, \frac{\pi}{2}])$ telles que

$$\begin{aligned} u(x) &= x & u'(x) &= 1 \\ v'(x) &= \cos x & v(x) &= \sin x \end{aligned}$$

Alors,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'v \underbrace{=}_{IPP} [uv]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'v = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$$

Or

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

Ainsi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = \frac{\pi}{2} - 1$$

■ I-2

Changement de variable sur une intégrale $\int_a^b f$

Point de départ dans cette section : une intégrale $\int_a^b f(t)dt$ que l'on souhaite simplifier.

Commentaires :

Le changement de variable dans une intégrale $\int_a^b f$ est une modification raisonnable du "f", destinée à simplifier le calcul :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_\alpha^\beta g(x) dx$$

(L'aire sous la courbe de f est la même que la même que sous celle de g , quitte à changer des bornes d'intégration.) Il y a une infinité de telles fonctions mais la formule du "changement de variable" est une technique particulière permettant d'y arriver.

Nous allons voir plusieurs manière de l'exprimer.

I.2-a) Intégration par substitution et changement de variable $x = \varphi(t)$

On rappelle le théorème de cours ci-dessous, dont la démonstration est un principe simple de manipulation de fonctions, et qui est rappelée également.

Théorème 2 dit d'intégration par substitution / changement de variable

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, I un intervalle f et φ deux fonctions telles que :

- $g \circ \varphi : [a, b] \xrightarrow{\varphi} I \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ soit bien définie
- $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ soit continue
- $\varphi : [a, b] \rightarrow I$ soit $\mathcal{C}^1$

alors on a

$$\int_a^b \underbrace{g(\varphi(t))\varphi'(t)}_{\text{"f(t)"}} dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(x) dx$$

Démonstration :

On part d'un principe simple : la formule de dérivation de la composition sur des fonctions $\mathcal{C}^1$:

$$(G \circ \varphi)'(t) = \varphi'(t) \cdot G'(\varphi(t))$$

La formule précédente permet ainsi de réécrire l'intégrale d'une autre manière :

$$\int_a^b \underbrace{\varphi'(t) \cdot G'(\varphi(t))}_{f(t)} dt = \int_a^b (G \circ \varphi)'(t) dt = G(\varphi(b)) - G(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \underbrace{G'(t)}_{g(t)} dt$$

□

Notation :

Comme on peut le voir dans la démonstration, l'égalité du théorème pourrait s'écrire avec la même variable t des deux côtés. Néanmoins, on s'aperçoit que pour des raisons de praticité et de notation dans les calculs, il est plus pertinent (sous peine de confusions) d'utiliser plutôt deux noms de variables différents :

$$\int_a^b \underbrace{\varphi'(t) \cdot G'(\varphi(t))}_{f(t)} dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \underbrace{G'(x)}_{g(x)} dx$$

Remarque :

La plupart du temps, ce théorème est fait pour être utilisé dans ce sens là :

$$\underbrace{\int_a^b \underbrace{g(\varphi(t))\varphi'(t)}_{\text{"f(t)"}} dt}_{\text{départ}} = \underbrace{\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(x) dx}_{\text{arrivée}}$$

Méthode 1 : Calcul par identification directe des intervenants dans la formule

C'est la méthode la moins courante, mais l'application la plus directe de la formule de substitution :

Étant donné φ (qui est généralement donnée dans l'énoncé), on repère dans l'intégrale $\int_a^b f$ les fonctions φ et g en les mettant en valeur chacune de leur côté pour

$$\text{trouver } g \text{ telle que } \int_a^b f(t) dt = \int_a^b g(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

■ Exemple 3 :

Calculons $\int_1^2 \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2} dt$ avec le chang. de variable $\varphi(t) = -\frac{1}{t}$

Soit $\varphi(t) = -\frac{1}{t}$ et $g : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x > 0$.

de cette manière, $f = g \circ \varphi$ est bien définie.

Le changement de variable φ est $\mathcal{C}^1([1, 2])$, tandis que g est continue.

On constate également que

t	$1 (= a)$	$2 (= b)$
$\varphi(t)$	$-1 (= \alpha)$	$-\frac{1}{2} (= \beta)$

La formule de substitution donne alors

$$\int_1^2 \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2} dt = \int_1^2 \underbrace{e^{-\frac{1}{t}}}_{g(\varphi(t))} \underbrace{\frac{1}{t^2}}_{\varphi'(t)} dt = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} e^x dx = [e^x]_{-1}^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} - e^{-1} = \frac{1}{e} (e^{\frac{1}{2}} - 1)$$

Explications générales : Observons le principe de substitution sur la formule :

$$\left(\int_a^b f(t) dt = \right) \int_a^b g(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} g(u) du$$

De gauche à droite :

- $g(\varphi(t))$ se transforme en $g(u)$:

$$\int_a^b \underbrace{g(\varphi(t))\varphi'(t)}_{\text{g(x) dx}} dt = \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$$

D'où le fait qu'on rencontre souvent la notation

$$\boxed{x = \varphi(t)}$$

- " $\varphi'(t) dt$ " se transforme en " dx " :

$$\int_a^b g(\varphi(t)) \underbrace{\varphi'(t) dt}_{dx} = \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$$

qui s'écrirait comme une "forme différentielle" (notion détaillée HP)

$$dx = \varphi'(t) dt$$

Commentaires :

L'explication précédente prend son sens de la manière suivante :

- Pour le premier item précédente, : on intègre $g(\varphi(t))$ entre a et b , ce qui signifie qu'on intègre g entre " $\varphi(a)$ " = α et " $\varphi(b)$ " = β
- Le deuxième item $dx = \varphi'(t) dt$ se traduirait comme "la dérivée de x par-rapport à t est $\varphi'(t)$ ", ce qui, en PC, s'écrit également

$$\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$$

En pratique, "en maths", la théorie (qui n'est pas à votre programme) sur ces notations permet de considérer tout ceci comme des **calculs avec 3 quantités "différentes"** qui sont " $dx, \varphi'(t)$ et dt ". que l'on peut multiplier ou diviser à notre guise, avec les significations suivantes :

dx = infime variation de x ", dt = infime variation de t "

ainsi que par conséquent :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\text{infime variation de } \varphi(t)}{\text{infime variation de } t} = \varphi'(t) \quad (\text{cf. définition de la dérivée})$$

Ceci peut donc donner lieu à une rédaction du type suivant :

■ Exemple 4 :

Re-calculons $\int_1^2 \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2} dt$ avec le chang. de variable $x = -\frac{1}{t}$

Soit $x = -\frac{1}{t}$ qui est $\mathcal{C}^1([1, 2])$, avec $dx = \frac{1}{t^2} dt$

On constate également que

t	1	2
x	-1	$-\frac{1}{2}$

On reconnaît alors

$$\int_1^2 \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2} dt = \int_1^{\frac{1}{2}} \underbrace{e^x}_{g(x)} \underbrace{\frac{1}{t^2} dt}_{dx}$$

où $g = \exp$ continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, par formule de substitution,

$$\int_1^2 \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2} dt = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} e^x dx = \dots = \frac{1}{e} \left(e^{\frac{1}{2}} - 1 \right)$$

I.2-b) Changement de variable (le vrai !) avec changement de variable $t = \psi(x)$

Dans cette partie, on suppose que φ' ne s'annule pas, ce qui signifie en réalité que φ est **strictement monotone**. En notant $\psi = \varphi^{-1}$, on obtient alors

$$x = \varphi(t) \Leftrightarrow t = \psi(x)$$

⚠ Remarque :

Si φ' ne s'annule pas sur l'intervalle $[a, b]$, on peut alors écrire :

$$dt = \frac{1}{\varphi'(t)} dx \quad \text{ou} \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)}$$

Ce qui est cohérent avec la notation "dérivée de t par rapport à x " qui serait :

$$\frac{dt}{dx} = \psi'(x) \quad \text{ou} \quad dt = \psi'(x) dx$$

car par formule de dérivabilité de l'inverse :

$$\frac{1}{\varphi'(t)} = (\varphi^{-1})'(x) = \psi(x)$$

où on rappelle au passage que φ est $\mathcal{C}^1$ ssi ψ est $\mathcal{C}^1$.

⚠ Remarque :

Dans le cas où φ (ou ψ) est bijective, le théorème de substitution peut s'écrire d'une manière qui semble moins abordable, mais qui pourtant est nettement plus pratique d'utilisation car on n'a pas à "deviner" le g et que les vérifications se font directement sur f et le changement de variable

Théorème 3 *Changement de variable version "t = ψ(x)"*

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, I un intervalle, ainsi que f et ψ deux fonctions telles que :

- $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ soit continue
- $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ soit $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone

alors on a

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{\psi^{-1}(a)}^{\psi^{-1}(b)} f(\psi(x)) \psi'(x) dx$$

Démonstration :

On pose $\alpha = \psi^{-1}(a)$ et $\beta = \psi^{-1}(b)$. Alors ψ est bien $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle fermé d'extrémités α, β . le théorème de substitution permet de dire que

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{\psi(\alpha)}^{\psi(\beta)} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\psi(x)) \psi'(x) dx$$

Ce qui s'écrit donc bien

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{\psi^{-1}(a)}^{\psi^{-1}(b)} f(\psi(x)) \psi'(x) dx$$

□

Méthode 2 : On exprime t en fonction de x

Concrètement, dans les calculs, on peut poser

$$x = \varphi(t) \text{ (ou directement } t = \psi(x))$$

et, si φ' ne s'annule pas sur l'intervalle d'intégration :

$$dt = \psi'(x) dx$$

Le remplacement peut donc être fait directement dans la formule de l'intégrale.

■ Exemple 5 :

Re-calculons $\int_1^2 \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2} dt$ avec le changement de variable $x = -\frac{1}{t}$.

Posons $x = -\frac{1}{t}$ qui est donc un changement de variable $\mathcal{C}^1$ et bijectif avec

$$t = -\frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x^2} > 0$$

sur les intervalles

t	1	2
x	-1	$-\frac{1}{2}$

La formule de changement de variable donne alors (on remplace t par $-\frac{1}{x}$ et dt par $\frac{1}{x^2} dx$) :

$$\int_1^2 \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2} dt = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \underbrace{e^x}_{\frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2}} \underbrace{x^2}_{\frac{1}{x^2}} dx = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} e^x dx = \frac{1}{e} \left(e^{\frac{1}{2}} - 1 \right)$$

I-3

Primitivation

Pour désigner **une** primitive de f de variable $x \in I$, on peut écrire

$$\int^x f, \quad \text{ou} \quad \int^x f, \quad \text{ou souvent simplement} \quad \int f,$$

et la primitive F de f qui s'annule en $c \in I$ est définie pour tout $x \in I$ par

$$F(x) = \int_c^x f = \int_c^x f.$$

Ainsi, pour calculer des primitives, toutes les formules des intégrales peuvent s'adapter, notamment l'IPP et le changement de variable !

■ Exemple 6 :

Calculer une primitive de $x \sin x$ sur $\mathbb{R}$

On pose les deux fonctions $u, v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telles que

$$\begin{aligned} u(x) &= x & u'(x) &= 1 \\ v'(x) &= \sin x & v(x) &= -\cos x \end{aligned}$$

Alors,

$$\int x \sin x dx = \int \underbrace{u'v}_{IPP} = uv - \int u'v = -x \cos x + \int \cos x dx$$

Ainsi

$$\int x \sin x dx = \sin x - x \cos x +$$

■ Exemple 7 :

Calculons une primitive de $\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$ sur $]0, +\infty[$ avec le changement de variable $u = -\frac{1}{x}$.

La fonction demandée étant continue, une primitive existe.

(Ceci est une fonction sous la forme $u'e^u$. Elle est donc théoriquement facile à intégrer mais on souhaite ici illustrer le théorème de changement de variable dans une primitive.)

Posons $u = -\frac{1}{x}$ qui est donc un changement de variable $\mathcal{C}^1$ et bijectif avec

$$x = -\frac{1}{u} \quad \text{et} \quad \frac{dx}{du} = \frac{1}{u^2} > 0$$

La formule de changement de variable donne alors (on remplace x par $-\frac{1}{u}$ et dx par $\frac{1}{u^2} du$) :

$$\int \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} dx = \int \underbrace{e^u}_{\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}} \underbrace{u^2}_{\frac{1}{u^2}} du = \int e^u du = e^u = e^{-\frac{1}{x}}$$

II Convergence d'une intégrale (impropre ou) généralisée

Rappel de vocabulaire avant de commencer :

Définition

On rappelle qu'une fonction f est dite continue sur un intervalle $]a, b[$ si elle est continue sur $]a, b[$ et si $\lim_{b^-} f = f(b)$.

Pour la deuxième condition, on dit souvent que f est continue en b^- .

Le même type de vocabulaire est évidemment valable sur des intervalles de type $[a, b[$ où f serait alors continue en a^+ .

Exemple 8 :

Soit $f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$. Alors f est continue sur $] - \infty, 0[$ et $[0, +\infty[$.

⚠ CONFUSION

Dans l'exemple précédent, f n'est pas continue sur $] - \infty, 0[\cup [0, +\infty[$. En effet, $] - \infty, 0[\cup [0, +\infty[= \mathbb{R}$ et f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ car non continue en 0^- .

II-1 Déf. d'une intégrale généralisée sur un intervalle semi-ouvert

Commentaires :

On observe $\int_a^b f$, où f est une fonction continue au moins sur $]a; b[$. Quand parle-t-on d'intégrale impropre (ou généralisée) ?

- Dans le cas où a ou b (voir les 2) sont infinis.
- Dans le cas où f n'est pas définie ou non continue en a ou b (voir les deux.)

Définition

Soit $f : [a; b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b[$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

- Si $\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f$ existe et est finie, alors on dit que $\int_a^b f$ converge (en b), (ou qu'elle est convergente) et dans ce cas, on note
$$\int_a^b f = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f$$
- Sinon, on dit que l'intégrale $\int_a^b f$ diverge (en b), (ou qu'elle est divergente)



Remarque :

Dans le cas où $\lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} \int_a^x f = \infty$, il peut arriver que l'on note $\int_a^b f = \infty$.

Exemples :

- 9 ■ Montrons que $\int_0^{+\infty} te^{-t^2} dt$ est convergente et $\int_0^{+\infty} te^{-t^2} dt = \frac{1}{2}$:

La fonction $f : t \in [0; +\infty[\mapsto te^{-t^2}$ est continue, donc le seul problème est en $+\infty$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$. On a $\int_0^x te^{-t^2} dt = \left[-\frac{e^{-t^2}}{2} \right]_0^x = \frac{1}{2} (1 - e^{-x^2})$.

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x te^{-t^2} dt = \frac{1}{2}$

On en déduit que $\int_0^{+\infty} te^{-t^2} dt$ est convergente et $\int_0^{+\infty} te^{-t^2} dt = \frac{1}{2}$.

- 10 ■ Montrons que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ est divergente :

La fonction $f : t \in [1; +\infty[\mapsto \frac{1}{t}$ est continue. Il y a donc un problème en $+\infty$. Soit $x \in [1; +\infty[$. On a

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt = [\ln t]_1^x = \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$$

On en déduit que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ est divergente. On peut noter de plus que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt = +\infty$

Commentaires :

Par le changement de variables $t = -u$, une intégrale $\int_a^b$ se "transforme" en une intégrale $\int_{-b}^{-a}$ (cf changement de variable un peu plus tard). Par exemple, $\int_0^{+\infty}$ se transforme en $\int_{-\infty}^0$. Il est donc logique que la définition reste similaire si on souhaite intégrer f sur $] - \infty; b]$ ou tout autre intervalle ouvert à gauche :

Définition

Soit $f :]a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$.

- Si $\lim_{x \rightarrow a, x > a} \int_x^b f$ existe et est finie, alors on dit que $\int_a^b f$ converge (en a) et dans ce cas, on a

$$\int_a^b f = \lim_{x \rightarrow a, x > a} \int_x^b f$$

- Sinon, on dit que l'intégrale $\int_a^b f$ est divergente.

■ Exemple 11 :

Montrons que $\int_0^1 \frac{1}{t} dt$ est divergente.

La fonction $f : t \in]0; 1] \mapsto \frac{1}{t}$ est continue. Il y a donc un **problème en 0**. Soit $x \in]0; 1]$.

On a $\int_x^1 \frac{1}{t} dt = [\ln t]_x^1 = -\ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$

On en déduit que $\int_0^1 \frac{1}{t} dt$ est divergente. On peut noter de plus que $\int_0^1 \frac{1}{t} dt = +\infty$



Remarque :

Dans toute la suite, les propriétés ne concernant qu'un seul point critique seront énoncées dans le cas des intégrales du type $\int_a^b f$, où $a \in \mathbb{R}$, $b \in \bar{\mathbb{R}}$ et $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est continue. Les cas où $a \in \bar{\mathbb{R}}$ et $b \in \mathbb{R}$ se démontreront de la même manière par symétrie du raisonnement ou s'en déduisent par changement de variables.



Définition

On appelle *nature* d'une intégrale $\int_a^b f$ son caractère convergent ou divergent.



Remarque :

"Donner la nature d'une intégrale" signifie « dire si elle est convergente ou divergente ». De la même façon, dire que deux intégrales sont de "même nature" signifie qu'elles sont soit toutes deux convergentes, soit toutes deux divergentes.

Théorème 4 (Relation de Chasles)

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle de borne supérieure $b \in \bar{\mathbb{R}}$. Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors, pour tout $a, c \in I$,

$$\int_a^b f \quad \text{et} \quad \int_c^b f \quad \text{ont la même nature.}$$

et de plus, en cas de convergence, la relation de Chasles généralisée est vérifiée :

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Démonstration :

Soient $x \in I$, alors f est continue sur $I_x = [\min(a, c, x), \max(a, c, x)]$ car $I_x \subset I$. La relation de Chasles classique sur une fonction f continue s'applique alors :

$$\int_a^x f = \int_a^c f + \int_c^x f$$

la quantité $\int_a^c f$ est une constante indépendante de x . Ainsi, le passage à la limite quand $x \rightarrow b$ donne le résultat escompté. $\square$



Remarque :

Cette propriété permettra de décomposer l'étude d'une intégrale sur des morceaux plus pratiques ou éventuellement déjà étudiés.

■ Exemple 12 :

On a vu que $\int_0^{+\infty} te^{-t^2} dt$ converge. Comme la fonction $t \mapsto te^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\int_a^{+\infty} te^{-t^2} dt$ converge pour tout $a \in \mathbb{R}$.



CONFUSION

Les intégrales ont peut être même nature mais attention, elles n'ont pas nécessairement même valeur. Par exemple :

$$\int_0^{+\infty} te^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \neq \int_{-1}^{+\infty} te^{-t^2} dt (= \frac{1}{2e})$$

II-2 Intégrales faussement impropres

Propriété 5

Si

- f est continue sur $[a, b[$ où $a, b \in \mathbb{R}$ (c'est-à-dire que l'intervalle est **borné**)
- et que f est prolongeable par continuité en b ,

alors

- $\int_a^b f$ est convergente
- et $\int_a^b f = \int_a^b \tilde{f}$ où $\tilde{f}$ est la prolongée de f en b

Démonstration :

Supposons que f soit continue sur $[a, b[$ et prolongeable par continuité en b .
On rappelle que, dans ce cas, la prolongée $\tilde{f}$ de f en b est définie par

$$\tilde{f} : t \in [a, b] \mapsto \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in [a, b[\\ \lim_{x \rightarrow b, x < b} f(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction $\tilde{f}$ étant continue sur $[a, b]$, la fonction primitive

$$\tilde{F} : x \in [a, b] \mapsto \int_a^x \tilde{f}(t) dt$$

est bien définie et continue sur $[a, b]$.

Or, comme $\tilde{f}(t) = f(t)$ pour tout $t \in [a, b[$, on a également que

$$\tilde{F}(x) = \int_a^x f \quad \forall x \in [a, b[$$

La continuité de $\tilde{F}$ en b signifie donc exactement que

$$\lim_{x \rightarrow b, x < b} \int_a^x f = \lim_{x \rightarrow b, x < b} \tilde{F}(x) = \tilde{F}(b) = \int_a^b \tilde{f}$$

□

Commentaires :

De cette propriété, on déduit que la notation est cohérente avec celle utilisée dans les cas traités pour les intégrales définies sur un segment.



Définition

Si f est continue sur $[a, b[$ et prolongeable en b par continuité, on dit que $\int_a^b f$ est *faussetment impropre en b* (ou faussetment impropre s'il n'y a pas de doute possible.)

■ Exemple 13 :

$\int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt$ de même que $\int_0^1 \frac{\cos t - 1}{t^2} dt$ sont toutes deux faussetment impropres :

$t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est prolongeable par continuité en 0 par 1 et $t \mapsto \frac{\cos t - 1}{t^2}$ est prolongeable par continuité en 0 par $-\frac{1}{2}$



BIEN VÉRIFIER QUE LA BORNE EST UN NOMBRE FINI

➤ Une intégrale ne peut être faussetment impropre en l'infini.

■ Exemple 14 :

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ diverge, alors que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} = 0$.

En l'infini, il ne suffit donc pas de vérifier la convergence !

II-3 Définition d'une intégrale généralisée sur un intervalle ouvert



Définition

Soit $f :]a; b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On dit que $\int_a^b f$ est *convergente*, s'il existe $c \in]a; b[$ tel que $\int_a^c f$ converge en a et $\int_c^b f$ converge en b .

Dans ce cas, $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$. Sinon, on dit qu'elle *diverge*.



Remarque :

Si on veut démontrer la divergence, il faut ici montrer que **pour tout** $c \in]a; b[$, **l'une au moins** des intégrales $\int_a^c f$ ou $\int_c^b f$ diverge, ce qui n'est pas très pratique. Nous verrons donc ici un exemple du cas de convergence et verrons ensuite comment simplifier la considération de la divergence.

■ Exemple 15 :

$\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2} dt$ converge :

La fonction $t \mapsto te^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. (On a donc un problème en $+\infty$ et $-\infty$: cas de l'intervalle ouvert)

★ On a déjà vu que $\int_0^{+\infty} te^{-t^2} dt$ converge (avec $\int_0^{+\infty} te^{-t^2} dt = \frac{1}{2}$).

★ Étudions $\int_{-\infty}^0 te^{-t^2} dt$: De la même façon que pour la première, $\forall x \leq 0$, on a

$$\int_x^0 te^{-t^2} dt = - \int_0^x te^{-t^2} dt = - \left[-\frac{e^{-t^2}}{2} \right]_0^x = -\frac{1}{2} (1 - e^{-x^2}).$$

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^0 te^{-t^2} dt = -\frac{1}{2}$ et donc $\int_{-\infty}^0 te^{-t^2} dt$ converge avec

$$\int_{-\infty}^0 te^{-t^2} dt = -\frac{1}{2}$$

En conclusion, $\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2} dt$ converge avec de plus

$$\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2} dt = \int_0^{+\infty} te^{-t^2} dt + \int_{-\infty}^0 te^{-t^2} dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

Commentaires :

La propriété suivante permet de généraliser la propriété concernant la convergence, mais également de nous simplifier la technique lorsque l'on souhaite prouver la divergence.

Propriété 6

Soit $f :]a; b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

- Si $\int_a^b f$ est convergente, alors, **pour tout** $c \in]a; b[$, on a $\int_a^c f$ converge en a et $\int_c^b f$ converge en b . De plus, $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$
- S'il existe $c \in]a; b[$ tel que $\int_a^c f$ diverge en a ou $\int_c^b f$ diverge en b , alors $\int_a^b f$ diverge.

Démonstration :

i) Supposons que $\int_a^b f$ est convergente. Alors, par définition, il existe $c_0 \in]a; b[$ tel que $\int_a^{c_0} f$ et $\int_{c_0}^b f$ convergent. Soit maintenant $c \in]a; b[$. Par relation de Chasles généralisée, comme f est continue sur I qui contient a, c_0, c , on sait que $\int_a^c f$ est de même nature que $\int_a^{c_0} f$.

et que

$$\int_a^c f = \int_a^{c_0} f + \int_{c_0}^c f$$

De même, $\int_c^b f$ est de même nature que $\int_{c_0}^b f$ et

$$\int_c^b f = \int_{c_0}^b f + \int_c^{c_0} f.$$

On en déduit que $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ convergent et que

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^{c_0} f + \underbrace{\int_{c_0}^c f + \int_c^{c_0} f}_{=0} + \int_{c_0}^b f = \int_a^b f$$

ii) c'est exactement la négation de la propriété du i).

□

■ Exemple 16 :

Montrons que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ diverge :

La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est continue sur $]0; +\infty[$. Elle admet donc un problème en 0 et en $+\infty$. (cas de l'intervalle ouvert)

★ Étude du problème en 0 : étudions par exemple $\int_0^1 \frac{1}{t^2} dt$:

On pose $x \in]0; +\infty[$. $\int_x^1 \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_x^1 = -1 + \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$

Ainsi $\int_0^1 \frac{1}{t^2} dt$ diverge et donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ diverge.



IL N'Y A PAS DE FORME INDÉTERMINÉE DANS LA RELATION DE CHASLES

La propriété dit bien qu'il suffit que l'une des deux parties diverge pour avoir la divergence. Cela signifie en particulier que si les deux parties divergent, ce n'est **pas** une forme indéterminée...

II-4

Définition d'une intégrale généralisée sur une réunion d'intervalles ouverts



ERREUR CLASSIQUE :

Considérons $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$. Il y a une erreur dans le calcul ci-dessous :

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^1 = -2 < 0 \quad \textbf{incohérent} \text{ avec le fait que } \frac{1}{x^2} \geq 0$$

L'erreur vient du fait que l'on a oublié de vérifier la continuité de la fonction sur $[-1, 1]$. On observe en effet que $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ n'est pas continue en 0. Dans ce cas, il faut découper l'intégrale suivant le principe de la définition ci-dessous.



Définition

Soit $f :]a; c[\cup]c; b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $c \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $a < c < b$.

On dit que $\int_a^b f$ est **convergente**, si $\int_a^c f$ converge en a et c et si $\int_c^b f$ converge en b et c . Sinon, on dit qu'elle **diverge**.

■ Exemple 17 :

$\int_{-1}^1 \frac{1}{t^2} dt$ diverge :

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est continue sur $[-1, 0[$ et $]0, 1]$. Or, par calcul direct de primitive, on trouve que $\int_0^1 \frac{1}{t^2} dt$ diverge. Cela suffit pour affirmer que $\int_{-1}^1 \frac{1}{t^2} dt$ diverge.



Notation :

Dans la suite du cours, I désignera un intervalle ou une réunion d'intervalles ouverts, fermés, ou semi-ouverts, qu'ils soient bornés ou non. Dans ce cas, $\int_I f$ désignera $\int_a^b f$ où $a = \min I$ et $b = \max I$.



Remarque :

Cette notation ne pourra être utilisée que dans le cas où l'ordre des bornes n'a pas d'importance. Par exemple, pour $I = [0, 3]$, $\int_I f = \int_0^3 f$ n'est a priori pas égale à $\int_3^0 f$.

III Manipulation des intégrales impropres

III-1 Linéarité

Théorème 7 de linéarité de l'intégrale

Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ sont convergentes, alors $\int_a^b (f + \lambda g)$ est convergente et dans ce cas

$$\int_a^b (f + \lambda g) = \int_a^b f + \lambda \int_a^b g$$



SI...ALORS...

La réciproque est fautive : il suffit de prendre n'importe quelle fonction f telle que

$$\int_I f \text{ est divergente. Par ex. } \int_0^{+\infty} 1 + (-1) dt = \int_0^{+\infty} 0 dt = 0$$

mais

$$\int_0^{+\infty} 1 dt + \int_0^{+\infty} (-1) dt \text{ est une forme indéterminée}$$

III-2 IPP

Théorème 8 (Ipp d'une intégrale impropre)

Soient u, v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]a, b[$ ($a < b$) telles que

$\lim_{x \rightarrow a^+} u(x)v(x)$ et $\lim_{x \rightarrow b^-} u(x)v(x)$ existent et sont finies

On a alors : $\int_a^b u'v$ est de même nature que $\int_a^b uv'$

s'il y a convergence, on a

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

où $[uv]_a^b$ est défini par

$$[u(t)v(t)]_a^b := \lim_{x \rightarrow b^-} u(x)v(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} u(x)v(x).$$

Démonstration :

Soient $c, x \in]a, b[$. Comme u, v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[c, x]$ (ou $[x, c]$ suivant le sens de c, x , on peut appliquer l'Ipp classique :

$$\int_c^x u'(t)v(t) dt = [uv]_c^x - \int_c^x u(t)v'(t) dt$$

Le reste n'est que simple passage à la limite, tout d'abord vers b qui donne une première formule :

$$\int_c^b u'(t)v(t) dt = \lim_{x \rightarrow b^-} u(x)v(x) - u(c)v(c) - \int_c^b u(t)v'(t) dt$$

puis un passage à la limite vers a :

$$\int_c^a u'(t)v(t) dt = \lim_{x \rightarrow a^+} u(x)v(x) - u(c)v(c) - \int_c^a u(t)v'(t) dt$$

on multiplie par -1 , ce qui inverse les bornes :

$$\int_a^c u'(t)v(t) dt = u(c)v(c) - \lim_{x \rightarrow a^+} u(x)v(x) - \int_a^c u(t)v'(t) dt$$

puis on additionne les deux égalités en b, c et a, c qui, grâce à la relation de Chasles, donne le résultat annoncé. $\square$



Remarque :

Si u et v sont continues en a ou b (par exemple en a) on sait que $\lim_{x \rightarrow a^+}$ existe. Il est donc inutile de vérifier les deux limites et on a

$$[u(t)v(t)]_a^b = \lim_{x \rightarrow b^-} u(x)v(x) - u(a)v(a).$$

■ Exemple 18 :

Convergence et valeur de $\int_0^{+\infty} te^{-t} dt$ par IPP :

Posons les fonctions $u, v \in \mathcal{C}^1([0; +\infty[)$ telles que :

$$\begin{aligned} u(t) &= t & v'(t) &= e^{-t} \\ u'(t) &= 1 & v(t) &= -e^{-t} \end{aligned}$$

• *Étape 1* : On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)v(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -xe^{-x} = 0$$

Les intégrales $\int_0^{+\infty} te^{-t} dt$ et $-\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ ont donc même nature. • *Étape 2* : L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ est convergente vers 1 (exercice), ainsi, on a la

convergence de $\int_0^{+\infty} te^{-t} dt$

• *Étape 3* : La valeur de $\int_0^{+\infty} te^{-t} dt$ est finalement donnée par la formule

$$\int_0^{+\infty} te^{-t} dt = [-te^{-t}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 0 + 1 = \boxed{1}$$



OUBLI RÉCURRENT

Énoncé à appliquer avec attention et en plusieurs étapes. Il est **nécessaire de** vérifier la convergence vers un réel de $\lim_{x \rightarrow b, x < b} u(x)v(x)$. En l'absence de cette vérification, deux problèmes peuvent se présenter :

1. La formule peut devenir une forme indéterminée. (cf ex11)
2. Les intégrales peuvent ne pas être de même nature. (cf ex12)

■ Exemple 19 :

On souhaite déterminer la nature de $\int_1^{+\infty} t \ln t dt$ en passant par l'IPP suivante :

$$\begin{aligned} u'(t) &= t & v(t) &= \ln t \\ u(t) &= \frac{t^2}{2} & v'(t) &= \frac{1}{t} \end{aligned}$$

où u, v sont deux fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $[1; +\infty[$.

On a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2}{2} \ln t = +\infty$$

et

$$\int_1^{+\infty} u(t)v'(t) dt = \int_1^{+\infty} \frac{t^2}{2} \frac{1}{t} dt = \int_1^{+\infty} \frac{t}{2} dt = +\infty$$

Cette dernière intégrale étant divergente.

L'expression "de droite" dans l'intégration par partie est donc une forme indéterminée...
On ne peut rien dire sur la convergence avec cette méthode !

■ Exemple 20 :

Considérons $\int_0^{+\infty} t dt$ et effectuons l'IPP suivante :

$$\begin{aligned} u(t) &= 1 & u'(t) &= 0 \\ v'(t) &= t & v(t) &= \frac{t^2}{2} \end{aligned}$$

$u, v \in \mathcal{C}^1([0; +\infty[)$. De plus :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)v(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2} = +\infty$$

$$\int_0^{+\infty} uv' = \int_0^{+\infty} t dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} u'v = \int_0^{+\infty} 0 dt$$

Si on ne tient pas compte de la divergence de $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)v(x)$, on annonce à tort que $\int_0^{+\infty} t dt$ a la même nature que $\int_0^{+\infty} 0 dt$, qui est trivialement convergente. Cherchez l'erreur...

Commentaires :

Mais quelles solutions ?

Une possibilité est généralement de repasser aux IPP "classiques", c'est-à-dire sur des intervalles fermés où la fonction est continue. Pour l'exemple précédent :

■ Exemple 21 :

Soit $x > 0$. en passant par l'IPP suivante :

$$\begin{aligned} u'(t) &= t & v(t) &= \ln t \\ u(t) &= \frac{t^2}{2} & v'(t) &= \frac{1}{t} \end{aligned}$$

u, v sont deux fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $[1; x]$. Alors

$$\begin{aligned} \int_1^x t \ln t dt &= \int_1^x u'(t)v(t) dt = \left[\frac{t^2}{2} \ln t \right]_1^x - \int_1^x \frac{t^2}{2} \frac{1}{t} dt \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int_1^x \frac{t}{2} dt \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \left[\frac{t^2}{2} \right]_1^x = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Il faut maintenant passer à la limite :

$$\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} = \underbrace{\frac{x^2}{4}}_{x \rightarrow +\infty \rightarrow +\infty} + \underbrace{(2 \ln x - 1)}_{x \rightarrow +\infty \rightarrow +\infty} + \frac{1}{4} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

L'intégrale est divergente.

III-3 Changement de variable

III.3-a) Le théorème et son application

Théorème 9 : Changement de variable dans une intégrale impropre

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, I un intervalle, ainsi que f et ψ deux fonctions telles que :

- $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ soit continue
- $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ soit $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone

Alors $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_\alpha^\beta f(\psi(x)) \psi'(x) dx$ sont de même nature, avec, en cas de convergence,

$$\int_a^b f(t) dt = \int_\alpha^\beta f(\psi(x)) \psi'(x) dx$$

où α et β sont définis par

$$\alpha := \lim_{x \rightarrow a^+} \varphi(x) \quad ; \quad \beta := \lim_{x \rightarrow b^-} \varphi(x)$$

Démonstration :

Pour commencer, par monotonie de ψ et donc de ψ^{-1} , on sait que $\alpha = \lim_{x \rightarrow a^+} \psi^{-1}(x)$ ainsi que $\beta = \lim_{x \rightarrow b^-} \psi^{-1}(x)$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Réciproquement, $\psi(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} a^+$ et $\psi(x) \xrightarrow{x \rightarrow \beta} b^+$.

★ Supposons $\int_a^b f$ converge. Montrons que l'intégrale de droite converge.

Soit $c, y \in]\alpha, \beta[$ (ou $c, t \in]\beta, \alpha[$). Par changement de variable sur un segment fermé :

$$\int_c^y f(\psi(x)) \psi'(x) dx = \int_{\psi(c)}^{\psi(y)} f(t) dt$$

Or, par convergence de $\int_a^b$, et comme $\psi(y) \xrightarrow{y \rightarrow \beta} b$ on a alors

$$\lim_{y \rightarrow \beta} \int_c^y f(\psi(x)) \psi'(x) dx = \int_{\psi(c)}^b f(t) dt$$

De même pour l'autre côté :

$$\lim_{y \rightarrow \alpha} \int_c^y f(\psi(x)) \psi'(x) dx = \int_{\psi(c)}^a f(t) dt$$

D'où, par relation de Chasles, la convergence de l'intégrale de droite avec effectivement l'égalité demandée.

★ Supposons que l'intégrale de droite converge.

Le même principe s'applique dans l'autre sens, mais avec $c, y \in]a, b[$ et la formule de changement de variable :

$$\int_c^y f(t) dt = \int_{\psi^{-1}(c)}^{\psi^{-1}(y)} f(\psi(x)) \psi'(x) dx$$

□

⚠ Remarque :

Avant de passer aux exemples, notons que l'énoncé peut être donné sous deux formes différentes :

"Montrer que l'intégrale [...] converge."

ou un peu plus poussée :

"Montrer que l'intégrale [...] converge et calculer sa valeur."

Le théorème de changement de variable peut s'utiliser pour l'une ou pour l'autre de ces questions, alors profitons-en pour voir sur les exemples suivants comment peut se rédiger la réponse dans ces deux types d'énoncés. (*1^{er} exemple avec la seule convergence et 2^{ème} exemple avec également la valeur de l'intégrale.*)

■ Exemple 22 :

Montrons que $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2} dt$ est une intégrale convergente grâce au changement de variable $x = -\frac{1}{t}$.

On pose le changement de variable $x = -\frac{1}{t}$. Le changement de variable est $\mathcal{C}^1$ tel que

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t^2} > 0$$

Il est donc strictement monotone, donc bijectif sur l'intervalle. On a de plus

$$t = -\frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x^2}$$

x s'applique aux bornes par limites :

t	1	$+\infty$
x	-1	0

L'intégrale est donc de même nature que

$$\int_{-1}^0 \frac{e^x}{(\frac{1}{x})^2} \left(\frac{1}{x^2}\right) dx = \int_{-1}^0 \underbrace{e^x}_{g(x)} dx$$

on obtient une fonction g **qui est continue** sur $\mathbb{R}$ (et donc sur $[0, 1]$). L'intégrale est donc bien convergente, ainsi que par équivalence, l'intégrale de départ.

■ Exemple 23 :

Montrons que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2} dt$ converge et vaut 1 par changement de variable $x = \frac{1}{t}$.

On pose le changement de variable $x = \frac{1}{t}$. Le changement de variable est $\mathcal{C}^1$ tel que

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{t^2} < 0$$

Il est donc strictement monotone, donc bijectif sur l'intervalle. On a de plus

$$t = -\frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x^2}$$

x s'applique aux bornes par limites :

t	0	$+\infty$
u	$+\infty$	0

Sous réserve de convergence de l'une des deux intégrales, par formule de changement de variable, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2} dt = - \int_{+\infty}^0 \frac{e^{-x}}{(\frac{1}{x})^2} \left(\frac{1}{x^2} \right) dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx$$

on obtient une fonction g **qui est continue** sur $\mathbb{R}$ (et donc sur $[0, 1]$). L'intégrale est donc bien convergente, ainsi que par équivalence, l'intégrale de départ.

De plus, on a déjà vu que l'intégrale obtenue est convergente, ainsi donc, par équivalence, l'intégrale de départ. De plus, par calcul, on a également vu que $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$, ce qui donne bien le résultat souhaité.

Démonstration :

On pose le changement de variable $u = -t$ dans l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ et on obtient directement, par changement de variable, que

$-\int_0^{-a} f(-u) du$ est de même nature que $\int_0^a f$ avec égalité en cas de convergence.

- Si f est paire :

$$\int_{-a}^0 f(u) du \text{ est de même nature que } \int_0^a f$$

et en cas de convergence $\int_{-a}^0 f(u) du = \int_0^a f$

- Si f est impaire :

$$\int_{-a}^0 f(u) du \text{ est de même nature que } \int_0^a f$$

et en cas de convergence $\int_{-a}^0 f(u) du = - \int_0^a f$. $\square$

Corollaire

Soit $a \in \bar{\mathbb{R}}$ et $f \in \mathcal{C}([-a; a])$ **paire ou impaire**.

Alors $\int_{-a}^a f$ converge ssi $\int_0^a f$ converge. De plus, en cas de convergence

$$\blacksquare \text{ Si } f \text{ est impaire, } \int_{-a}^a f(t) dt = 0$$

$$\blacksquare \text{ Si } f \text{ est paire, } \int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$$

Démonstration :

Si $\int_{-a}^a f$ converge alors il en va de même pour $\int_{-a}^0 f$ ainsi que $\int_0^a f$. De plus, d'après le corollaire précédent, si $\int_0^a f$ converge, il en va de même de $\int_{-a}^0 f$ et donc, par suite, de $\int_{-a}^a f$. L'équivalence de convergence est donc vérifiée.

D'où, en cas de convergence, par relation de Chasles,

$$\int_{-a}^a f = \int_{-a}^0 f(t) dt + \int_0^a f$$

Le reste est conséquence immédiate des égalités du corollaire précédent. $\square$

III.3-b) Cas des fonctions paires et impaires

Propriété 10

Soit $a \in \bar{\mathbb{R}}$ et $f \in \mathcal{C}([-a; a])$. Si f est paire ou impaire, la nature de $\int_0^a f$ est la même que celle de $\int_{-a}^0 f$ avec, en cas de convergence :

- $\int_{-a}^0 f = \int_0^a f$ si f est paire
- $\int_{-a}^0 f = - \int_0^a f$ si f est impaire.

III-4 Bilan des principaux résultats

Soit f continue sur une réunion d'intervalles I ou sur un intervalle $[a, b[$, $b \in]a, +\infty]$. $\lambda \in \mathbb{R}$.

ACTION	HYPOTHÈSES	CONCLUSION
Charles 1	$\int_a^c f$ est convergente $\int_c^b f$ est convergente	$\int_a^b f$ converge et $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$
Charles 2	$\int_a^b f$ converge $c \in [a, b]$	$\int_a^c f$ est convergente $\int_c^b f$ est convergente et $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$
Faussement impropre	b est fini $\lim_b f$ existe	$\int_a^b f$ converge.
Linéarité	$\int_I f$ converge $\int_I g$ converge	$\int_I (f + \lambda g) = \int_I f + \lambda \int_I g$
IPP 1	u, v de classe $\mathcal{C}^1$ $\lim_{x \rightarrow b^-} u(x)v(x)$ est finie	$\int_a^b u'v$ est de même nature que $\int_a^b uv'$
IPP2	u, v de classe $\mathcal{C}^1$ $\lim_{x \rightarrow b^-} u(x)v(x)$ est finie $\int_a^b u'v$ converge	$\int_a^b uv'$ converge $\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$

Changement de variable	g continue sur $]a, b[$ $u \in \mathcal{C}^1([a, b[)$ et u' strictement monotone	$\int_a^b g(u(t))u'(t) dt$ et $\int_{u(a)}^{u(b)} g(u) du$ sont de même nature
Changement de variable (suite)	g continue sur $]a, b[$ $u \in \mathcal{C}^1([a, b[)$ et u' strictement monotone En cas de convergence	$\int_a^b g(u(t))u'(t) dt = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u) du$

IV Fonctions positives et convergence absolue

Théorème 11 de positivité

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ tels que

- $a < b$ (**bornes croissantes**)
- f est continue sur $[a, b[$,
- $\int_a^b f$ converge
- $f \geq 0$ sur $[a, b]$,

alors

$$\int_a^b f \geq 0$$

Démonstration :

Le passage à la limite conserve les signes. $\square$



ORDRE DES BORNES

L'hypothèse de bornes croissantes est importante. En effet, si $a > b$ et que f est continue positive sur $[b, a[$ avec convergence de $\int_a^b f$, on a

$$\int_a^b f = - \int_b^a f \leq 0$$

Corollaire "Comparaison d'intégrales"

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f, g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ tels que

- $a < b$ (**bornes croissantes**)
- f, g sont continues et d'intégrales convergentes sur $[a, b[$,
- $f \leq g$ sur $[a, b[$,

alors

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

Démonstration :

On applique le théorème précédent à $\int_a^b (g - f)(t) dt$, puis la linéarité des intégrales convergentes. $\square$

Théorème 12 de positivité ... la suite

Pour $a < b$, soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

- f est continue sur $[a, b[$,
- f est de signe constant sur $[a, b[$,
- $\int_a^b f = 0$,

alors f est nulle sur $[a, b[$.

Démonstration :

Supposons que f soit non nulle sur $[a, b[$. Alors il existe $x_0 \in [a, b[$ tel que $f(x_0) > 0$. Par continuité de f , il existe un voisinage fermé $I \subset [a, b[$ autour de x_0 sur lequel

$$f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2} \quad \forall x \in I$$

On note $I = [\alpha, \beta]$. Par relation de Chasles, on a

$$0 = \int_a^b f = \int_a^\alpha \underbrace{f(t)}_{\geq 0} dt + \int_\alpha^\beta \underbrace{f(t)}_{\geq \frac{f(x_0)}{2}} dt + \int_\beta^b \underbrace{f(t)}_{\geq 0} dt \geq (\beta - \alpha) \frac{f(x_0)}{2}$$

ce qui est contradictoire avec le fait que $f(x_0)$ est strictement positif. $\square$



Remarque :

Ici aussi, la deuxième hypothèse est capitale. Il existe des fonctions non nulles d'intégrale nulle. (les aires au dessous et au dessus de l'axe des abscisses se compensent).

Dans la suite, on se donne $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, a < b$

Proposition 13

On se donne $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue **positive** sur $[a, b[$. Alors

$$\int_a^b f \text{ converge} \Leftrightarrow F : x \in [a, b[\mapsto \int_a^x f \text{ est majorée.}$$

Démonstration :

Avant tout F est une primitive de f , qui est positive par hypothèse. Ainsi,

$$F \text{ est croissante } (F' = f \geq 0).$$

Or, on sait qu'une fonction croissante sur $[a, b[$ cv en b ssi elle est majorée. C'est exactement la traduction de la proposition. $\square$

Théorème 14

On se donne $f, g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continues **positives** sur $[a, b[$ telles que

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b[$$

$$\text{Alors } \int_a^b g(t) dt \text{ cv} \Rightarrow \int_a^b f \text{ cv et } 0 \leq \int_a^b f \leq \int_a^b g(t) dt$$

$$\int_a^b f \text{ divergente} \Rightarrow \int_a^b g(t) dt \text{ divergente}$$

Démonstration :

Les fonctions $G : x \in [a, b[\mapsto \int_a^x g(t) dt$, $F : x \in [a, b[\mapsto \int_a^x f$ sont toutes deux continues et croissantes sur $[a, b[$ car de dérivée positive sur $[a, b[$. De plus, Comme G admet une limite en b , on a

$$G(x) \leq \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x g(t) dt = \int_a^b g(t) dt \quad \forall x \in [a, b[$$

Par comparaison des intégrales, on a alors

$$0 \leq F(x) = \int_a^x f \leq \int_a^x g(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt \quad \forall x \in [a, b[$$

F est donc une fonction croissante et majorée par $\int_a^b g(t) dt$. On en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow b} F(x) \text{ existe} \quad \text{et} \quad 0 \leq \lim_{x \rightarrow b} F(x) \leq \int_a^b g(t) dt$$

c'est-à-dire
$$0 \leq \int_a^x f \leq \int_a^b g(t) dt \quad \square$$

? Exercice 1

Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t - 1}{t^2} dt$ est convergente.

Solution

La fonction $f \mapsto \frac{\cos t - 1}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$. Il y a donc potentiellement un problème en $+\infty$.

On observe qu'elle est négative sur tout l'intervalle considéré. On peut donc par exemple poser $g = -f \geq 0$ pour répondre à cette question. Or, dans ce cas, on a

$$0 \leq g(t) = \frac{1 - \cos t}{t^2} \leq \frac{2}{t^2}$$

Or l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge (déjà vu) et par théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} g$ converge, ce qui entraîne par la même celle de $\int_1^{+\infty} f$.

★ Conclusion : l'intégrale $\int_1^{+\infty} f$ est convergente car convergente (en $+\infty$).

Remarque : Si c'était $\int_0^{+\infty} \frac{\cos t - 1}{t^2} dt$, on pourrait montrer que l'intégrale est faussement impropre en 0 grâce à un équivalent usuel.

Théorème 15 de convergence absolue

On se donne $f : [a; b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b[$ (où $a < b$).

$$\int_a^b |f| \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \int_a^b f \text{ converge} \\ \left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt \end{cases}$$

Démonstration :

(convergence admise) L'inégalité s'en déduit ensuite simplement par

$$-|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)|$$

puis

$$-\int_a^b |f(t)| dt \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

D'où

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \left| \int_a^b |f| \right| = \int_a^b |f(t)| dt$$

□

? Exercice 2

Pour $a \in \mathbb{R}^*$, $b > 0$, montrer que $\int_0^{+\infty} \cos(at)e^{-bt} dt = \frac{b}{a^2 + b^2}$. (avec IPP)

Solution

On note I l'intégrale en question.

★ Tout d'abord, montrons que l'intégrale converge. On remarque pour ce faire tout d'abord que $t \mapsto \cos(at)e^{-bt}$ est continue sur $[0, +\infty[$. L'unique problème se situe donc en $+\infty$.

Ensuite, pour tout $t \geq 0$, on a

$$0 \leq \left| \cos(at)e^{-bt} \right| \leq e^{-bt}$$

Or on peut montrer (exercice ou plus tard référence à la fin du chapitre) que $\int_0^{+\infty} e^{-bt} dt$ est convergente car $b > 0$. En conclusion, par théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives et par convergence absolue, l'intégrale de départ converge.

★ Effectuons maintenant une première intégration par partie avec deux fonctions $u, v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$:

$$u(t) = \cos(at) \quad u'(t) = -a \sin(at)$$

$$v'(t) = e^{-bt} \quad v(t) = -\frac{1}{b} e^{-bt}$$

On a

$$u(t)v(t) = -\frac{1}{b} \underbrace{\cos(at)}_{\text{borné}} \underbrace{e^{-bt}}_{\xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0 \text{ car } b > 0} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

Ainsi, comme cette limite est finie et que l'intégrale de départ est convergente, on peut appliquer l'IPP et on a

$$I = \underbrace{[u(t)v(t)]_0^{+\infty}}_{0 - u(0)v(0) = \frac{1}{b}} - \frac{a}{b} \int_0^{+\infty} \sin(at)e^{-bt} dt$$

où on sait que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(at)e^{-bt} dt$ est convergente.

De la même manière avec un second changement de variable $\mathcal{C}^1$

$$u(t) = \sin(at) \quad u'(t) = a \cos(at)$$

$$v'(t) = e^{-bt} \quad v(t) = -\frac{1}{b}e^{-bt}$$

les mêmes arguments donnent lieu à l'obtention de la formule avec intégrales convergentes :

$$\int_0^{+\infty} \sin(at)e^{-bt} dt = \underbrace{[u(t)v(t)]_0^{+\infty}}_{\substack{0 - u(0)v(0)=0 \\ a^2}} + \frac{a}{b} I$$

D'où, en réinjectant :

$$I = \frac{1}{b} - \frac{a^2}{b^2} I$$

ce qui, en isolant I donne au final :

$$I = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

Théorème 16 sur les fonctions équivalentes

On se donne $f, g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continues sur $[a, b[$ telles que

$$f \sim_b g.$$

avec l'une des deux fonctions de signe constant au voisinage de b . Alors

$$\int_a^b f \quad \text{est de même nature que} \quad \int_a^b g$$

Démonstration :

Quitte à échanger les fonctions, on peut supposer que $\int_a^b g$ converge.

Quitte maintenant à prendre $-g$ ou $-f$, on peut supposer que $g > 0$ (ou $f > 0$) au voisinage de b . Comme $f \sim_b g$, il en va de même pour l'autre.

Par équivalence, on a

$$f = hg \text{ avec } \lim_b h = 1$$

Par limite, il existe ensuite $B \in [a, b[$ tel que

$$\forall x \in [B, b[, \text{ on a } \frac{1}{2} \leq h \leq \frac{3}{2}$$

D'où, en multipliant par $g \geq 0$:

$$0 \leq \frac{1}{2}g \leq f \leq \frac{3}{2}g$$

Le théorème de comparaison des intégrales permet ensuite de conclure. $\square$

■ Exemple 24 :

Montrons que $\int_0^{+\infty} e^{-t-e^{-t}} dt$ converge :

$t \mapsto e^{-t-e^{-t}}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Par continuité de la fonction exponentielle,

$$\frac{e^{-t-e^{-t}}}{e^{-t}} = e^{-e^{-t}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} e^0 = 1$$

on a donc

$$e^{-t-e^{-t}} \underset{+\infty}{\sim} e^{-t}$$

Or, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ converge (déjà fait précédemment !), donc, par équivalence,

$\int_0^{+\infty} e^{-t-e^{-t}} dt$ converge.



CONFUSION

Ceci ne signifie en aucun cas que les intégrales sont ensuite égales (ou "équivalentes" !)

■ Exemple 25 :

On pose $f(t) = \frac{1+t}{t^2}$. On a

$$f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$$

Or, pour tout $x \geq 1$, on a *calcul laissé au lecteur*

$$\int_1^x f = \frac{3}{2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}, \quad \text{et} \quad \int_1^x \frac{1}{t^2} dt = 1 - \frac{1}{x}$$

On voit bien que si $x \rightarrow \infty$, on a

$$\int_1^x f(t) dt \sim \frac{3}{2} \text{ et } \int_1^x \frac{1}{t^2} dt \sim 1$$

D'où

$$\int_1^x f(t) dt \not\sim \int_1^x \frac{1}{t^2} dt$$

et de plus

$$\int_1^{+\infty} f \neq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$$

V Exemples fondamentaux

Théorème 17

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt \text{ cv en } +\infty \text{ ssi } \lambda > 0. \text{ Dans ce cas, on a } \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$$

Démonstration :

$t \mapsto e^{-\lambda t}$ est continue sur $[0; +\infty[$. Le problème est donc seulement en $+\infty$.

★ Cas $\lambda \in \mathbb{R}^*$: Soit $x > 0$. Alors

$$\int_0^x e^{-\lambda t} dt = \left[\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda} \right]_0^x = \frac{e^{-\lambda x} - 1}{-\lambda} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \begin{cases} \frac{-1}{-\lambda} & \text{si } \lambda > 0 \\ +\infty & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$$

★ Cas $\lambda = 0$: Soit $x > 0$, alors

$$\int_0^x e^{-\lambda t} dt = \int_0^x e^0 dt = \int_0^x 1 dt = x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

En conclusion, l'intégrale est convergente en $+\infty$ si et seulement si $\lambda > 0$ et dans

ce cas, on a $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$. $\square$

Théorème 18

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}. \int_0^{+\infty} t^n e^{-\lambda t} dt \text{ cv ssi } \lambda > 0. \text{ Dans ce cas, } \int_0^{+\infty} t^n e^{-\lambda t} dt = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}$$

Démonstration :

• On pose $\lambda \leq 0$.

On peut considérer que $n \geq 1$ (sinon on se ramène au théorème précédent). Ainsi, pour tout $t \geq 1$, on a

$$t^n e^{-\lambda t} \geq e^{-\lambda t} \geq 0 \quad \forall t \geq 1$$

Or, $\int_1^{+\infty} e^{-\lambda t} dt$ diverge (thm précédent). Par théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} t^n e^{-\lambda t} dt$ (et donc $\int_0^{+\infty} t^n e^{-\lambda t} dt$) diverge.

• On pose $\lambda > 0$.

On pose $f(t) = t^n e^{-\lambda t}$ pour tout $t \geq 0$. On a f continue sur $[0, +\infty[$. Le seul problème est donc en $+\infty$.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que I_n converge et que $I_n = \frac{n}{\lambda} I_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

★ Initialisation : Le théorème précédent nous dit que $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt$ converge et on a bien

$$I_0 = \frac{1}{\lambda} = \frac{0!}{\lambda^{0+1}}.$$

★ Hérédité : De $n-1$ à n : On pose l'Ipp suivante, avec $u, v \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[)$:

$$\begin{aligned} u &= t^n & u' &= n t^{n-1} \\ v' &= e^{-\lambda t} & v &= \frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda} \end{aligned}$$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Comme

$$[uv]_0^x = \left[t^n \frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda} \right]_0^x = x^n \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

, l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} u v'$ est de même nature que

$$\int_0^{+\infty} u' v = -\frac{n}{\lambda} \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-\lambda t} dt = -\frac{n}{\lambda} I_{n-1}$$

qui est justement convergente par HR. Ainsi, I_n converge d'une part, et d'autre part, on peut calculer sa valeur par IPP :

$$I_n = \int_0^{+\infty} u' v = [uv]_0^{+\infty} + \frac{n}{\lambda} I_{n-1} = 0 + \frac{n}{\lambda} \cdot \frac{(n-1)!}{\lambda^{n-1+1}} = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}$$

$\square$
CQFD

Théorème 19

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$$

Démonstration :

admise $\square$

Par parité de la fonction on obtient également :

Corollaire

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

? Exercice 3

Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2+2t-2} dt$ converge et déterminer sa valeur.

(On pensera à se rapprocher, par un changement de variable opportun, d'une intégrale de type $\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du$. On trouve $\frac{\sqrt{\pi}}{e}$.)

Solution

On note $f(t) = e^{-t^2+2t-2}$. f est continue sur $\mathbb{R}$. Il y a donc potentiellement un problème en $\pm\infty$.

On remarque que

$$f(t) = e^{-(t^2-2t+2)} = e^{-((t-1)^2+1)} = e^{-1} e^{-(t-1)^2} = e^{-1} e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{2}(t-1))^2}$$

On pose donc le changement de variable

$$u = \sqrt{2}(t-1)$$

On a alors, sur l'intervalle considéré : $\frac{du}{dt} = \sqrt{2} > 0$.

Le changement de variable est donc strictement monotone. De surcroît, on a

$$dt = \frac{1}{\sqrt{2}} du$$

avec le changement de bornes par limites :

t	$-\infty$	$+\infty$
u	$-\infty$	$+\infty$

Ainsi, par changement de variable, on obtient, sous réserve de convergence de l'une des deux intégrales :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2+2t-2} dt = e^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} \frac{1}{\sqrt{2}} du$$

Or on sait d'après le cours que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} du$ est convergente et que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = \sqrt{2\pi}.$$

Ainsi, l'intégrale de départ est convergente et on obtient en réinjectant :

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2+2t-2} dt = e^{-1} \sqrt{\pi}$
